

Cours 9 (Suite de "Anneaux spéciaux")

A = anneau commutatif et unitaire.

Déf A est noethérien si toute chaîne croissante
d'idéaux est stationnaire. (ACC)

i.e. $\forall I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots \triangleleft A$

$$\exists N_0, \forall I_{N_0} = I_{N_0+1} = \dots$$

Rq A noethérien $\Leftrightarrow$ tout idéal est finiment engendré.

i.e. $\forall I \triangleleft A \exists n \geq 1, a_1, \dots, a_n \in I$ tq $I = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$
 $= a_1 A + \dots + a_n A$

Raison: $\Rightarrow$ Si $\exists I \triangleleft A$ qui n'est pas finiment engendré

$\Rightarrow$ on construit une suite $a_1, a_2, \dots$ tq $a_n \notin \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$

$\Rightarrow$ on a une chaîne croissante d'idéaux

$$\langle a_1 \rangle \subsetneq \langle a_1, a_2 \rangle \subsetneq \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \subsetneq \dots \triangleleft A$$

$\Rightarrow$ contredit à (ACC)

$\Leftarrow$. Soit $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ une chaîne d'idéaux de A .

$$I := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \triangleleft A \quad \text{donc finiment engendré par l'hyp.}$$

$$\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_n \in I \text{ tq } I = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$$

$$\exists N_0 \geq 1 \text{ tq } a_1, \dots, a_n \in I_{N_0}$$

$$\Rightarrow \forall N \geq N_0, I_N \supset I_{N_0} \supset \langle a_1, \dots, a_n \rangle = I$$

$$\Rightarrow I_N = I \quad \forall N \geq N_0$$

□

Exemple

Un anneau principal est noethérien.

(Car tout idéal est engendré par 1 élément)

Thm (Hilbert) A noethérien

Alors $A[T]$ est noethérien.

Preuve Soit $I \triangleleft A[T]$

On considère $\forall d \in \mathbb{N}$

$$I_d := \left\{ \begin{array}{l} \text{coefficients dominant d'éléments} \\ \text{de degré } d \text{ dans } I \end{array} \right\}$$

$$= \{ a_d \mid f(T) = a_d T^d + \dots + a_0 \in I \}$$

- $I_d \triangleleft A$

- $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \dots \triangleleft A$

$$A \text{ noethérien} \Rightarrow \exists N_0 \text{ tq } I_{N_0} = I_{N_0+1} = \dots$$

A noethérien $\Rightarrow I_0, I_1, \dots, I_{N_0}$ sont finiment engendrés

$$\forall 0 \leq d \leq N_0, \exists \{a_{d,i}\}_{i=1}^{m_d} \text{ tq } I_d = \langle a_{d,1}, \dots, a_{d,m_d} \rangle.$$

On choisit : $\forall d \leq N_0, \forall (1 \leq i \leq m_d), f_{d,i}(T) \in I \triangleleft A[T]$
 tq $f_{d,i}(T)$ a comme coeff dominant $a_{d,i}$.

Affirmation $\{f_{d,i} \mid \begin{smallmatrix} 0 \leq d \leq N_0 \\ 1 \leq i \leq m_d \end{smallmatrix}\}$ engendrent I .

En effet, si ce n'est pas le cas, on prend un polynôme $\neq F \in I$ tq $F \notin \langle f_{d,i} \mid \begin{smallmatrix} 0 \leq d \leq N_0 \\ 1 \leq i \leq m_d \end{smallmatrix} \rangle$ de degré minimal vérifiant cette propriété.

Si $d := \deg(F) \geq N_0$, $F(T) = c_d T^d + c_{d-1} T^{d-1} + \dots + c_0$

comme $c_d \in I_d = I_{N_0} = \langle a_{N_0,1}, \dots, a_{N_0,m_{N_0}} \rangle$

$\Rightarrow c_d = r_1 a_{N_0,1} + \dots + r_{m_{N_0}} a_{N_0,m_{N_0}}$ avec $r_i \in A$.

$\Rightarrow F(T) - \sum_{i=1}^{m_{N_0}} r_i \cdot \underbrace{f_{N_0,i}(T)} T^{d-N_0}$ a coeff de degré $< d$.

$\Rightarrow F(T) - \sum_{i=1}^{m_{N_0}} r_i \cdot \underbrace{f_{N_0,i}(T)} T^{d-N_0}$ est de degré $< d$.

$\nexists$
 $\langle f_{d,i} \mid \begin{smallmatrix} 0 \leq d \leq N_0 \\ 1 \leq i \leq m_d \end{smallmatrix} \rangle$

Contradiction à la minimalité de d

Si $d = \deg F < N_0$, $F(T) = c_d T^d + \dots + c_0$

comme $c_d \in I_d = \langle a_{d,1}, \dots, a_{d,m_d} \rangle$

$$\Rightarrow \exists r_1, \dots, r_{m_d} \text{ tq } c_d = \sum_{i=1}^{m_d} r_i a_{d,i}$$

$$\Rightarrow F(T) - \sum_{i=1}^{m_d} r_i f_{d,i}(T) \text{ est de degré } < d$$

$$\langle f_{d,i} \mid 0 \leq d \leq N_0, 1 \leq i \leq m_d \rangle$$

contradiction à la minimalité de d $\square$

(Cor A Noethérien $\Rightarrow A[T_1, \dots, T_n]$ noethérien)

Rq A noethérien, $I \triangleleft A$

on a A/I noethérien

(Raison: $\{\text{idéaux de } A \text{ contenant } I\} \xleftrightarrow{\text{bij}} \{\text{idéaux de } A/I\}$
 $J \longleftrightarrow J/I$)

Cor A Noethérien, $B = A$ -algèbre finiment engendré

Alors B est noethérien.

Preuve: B est finiment engendré sur A .

$$\text{i.e. } B \simeq A[T_1, \dots, T_n] / I$$

Hilbert $\Rightarrow A[T_1, \dots, T_n]$ est noethérien

Rq $\Rightarrow A[T_1, \dots, T_n]/I \text{ ————— } \square$

Rq B est en fait finiment présentée

cà-d. I est aussi finiment engendré.

Rq B est déterminée par une donnée "finie".

$$\frac{B \cong A[T_1, \dots, T_n]}{\langle f_1, \dots, f_r \rangle} \quad \text{avec } f_i \in A[T_1, \dots, T_n]$$

générateurs $\longleftarrow T_i$

$0 \longleftarrow f_i(T)$

(relations
entre les générateurs)

⚠ Rappel: A factoriel $\Rightarrow A[T_1, \dots, T_n]$ factoriel

mais A factoriel $\nRightarrow A/I$ factoriel !

(lié aux "singularités" de $\text{Spec}(A/I)$)

(Emil Artin)

Déf A anneau comm. unitaire

A est dit artinien si toute chaîne décroissante d'idéaux est stationnaire (DCC).

i.e. $\forall I_1 \supset I_2 \supset \dots$

$$\exists N_0 \text{ tq } I_{N_0} = I_{N_0+1} = \dots$$

Lemme A artinien $\Rightarrow A$ noethérien.

Exemples

- si A est une K -algèbre (K un corps)

$$A \text{ artinien} \Leftrightarrow \dim_K A < \infty$$

(Exo: $\Leftarrow$)

En particulier $\bullet \mathbb{K}[T]/(T^n)$ est artinien

- $\mathbb{K}[T]$ n'est pas artinien.

Pom $\Rightarrow$ (c.f. Atiyah-MacDonald "Introduction to Comm. Alg.")

A : K -alg. comm.

$$A \text{ artinien} \Leftrightarrow \dim_K A < \infty \Leftrightarrow \text{dimension de Krull de } A = 0 \quad (\text{i.e. tout idéal premier est max.})$$

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est artinien.

Plus généralement, tout anneau fini est artinien.

- $\mathbb{Z}$ n'est pas artinien

$$(p) \supset (p^2) \supset (p^3) \supset \dots$$

Def A anneau unitaire (pas forcément commutatif)

A est simple si $\forall I \triangleleft A$ bilatère

on a $I=0$ ou $I=A$.

Rq Si A est un anneau simple,

alors $Z(A) :=$ le centre de $A := \{a \in A \mid ab=ba \ \forall b \in A\}$

est forcément un corps.

Raison: Soit $0 \neq z \in Z(A)$

alors $zA = \left\{ \underset{az}{za} \mid a \in A \right\} \triangleleft A$ bilatère.

A simple
 $\Rightarrow \cancel{zA = \{0\}}$ ou $zA = A \ni 1$
 $0 \neq z \in$

$\Rightarrow \exists z' \in A$ tq $zz' = z'z = 1$ i.e. $z' = z^{-1}$

$$\Rightarrow z' \in Z(A)$$

Par conséquent, A est toujours une $\mathbb{K}$ -algèbre
sur un corps $\mathbb{K}$.

Thm (Wedderburn) Soit A une $(\mathbb{K}$ -algèbre) simple
avec $\dim_{\mathbb{K}} A < \infty$ (donc artinienne) anneau.
Alors

$$A \cong \text{Mat}_{n \times n}(D)$$

avec D une algèbre à division (sur $\mathbb{K}$)

Déf A anneau unitaire est dit semi-simple

[si A est un produit d'un nb fini d'anneaux simples.

Wedderburn : A $\mathbb{K}$ -algèbre semi-simple

$$\Rightarrow A \cong \prod_{i=1}^r \text{Mat}_{n_i \times n_i}(D_i)$$

avec $n_i \geq 1$, D_i algèbre à division.

Rq En particulier, si A est une $\mathbb{K}$ -algèbre commutative

de dimension finie (i.e. artinienne) et simple

alors

$A \cong \mathbb{K}'$ avec $\mathbb{K}'$ une
extension finie de $\mathbb{K}$.

(si A est commutative, artinien, semi-simple.)
 $A \cong K_1 \times \dots \times K_r$. K_i/K ext. finie.)

Fait : A anneau artinien.

alors $A \cong \prod_{i=1}^r A_i$ avec A_i artinien local.

Géométriquement :

A artinien (comm.)

$\Leftrightarrow \text{Spec}(A)$ est discret pour la top. Zariski.

$\parallel$
 $\{ \text{idéaux premiers de } A \}$

Chapitre III Modules

A : anneau (unitaire) pas forcément comm.

Déf Un A -module à gauche est un groupe abélien M muni d'action de A :
une application

$$A \times M \longrightarrow M$$

$$(a, m) \longmapsto a.m$$

Vérifiant les propriétés suivantes :

$$(i) \quad (a+a').m = a.m + a'.m$$

$$(ii) \quad a.(m+m') = a.m + a.m'$$

$$(iii) \quad (\text{associativité})$$

$$(a.a').m = a.(a'.m)$$

$\uparrow$
 A

$$(iv) \quad 1_A.m = m$$

) distributivité

$$\left(\Rightarrow 0_A.m = 0_M; \quad a.0_M = 0_M \quad \text{etc.} \right)$$

Définition équivalente:

Une structure de A -module sur un gp ab. M est la même donnée d'un morphisme d'anneaux unitaires :

$$A \xrightarrow{\varphi} \text{End}(M) := \text{Hom}(M, M)$$

(Exo! Montrer l'équivalence)

$$\left[\begin{array}{l} \text{Indication} \\ \cdot A \curvearrowright M \rightsquigarrow \begin{array}{c} A \xrightarrow{\varphi} \text{End}(M) \\ a \mapsto \left(\begin{array}{c} \varphi(a): M \rightarrow M \\ m \mapsto a.m \end{array} \right) \end{array} \\ \cdot A \xrightarrow{\varphi} \text{End}(M) \rightsquigarrow \begin{array}{c} A \times M \rightarrow M \\ (a, m) \mapsto \varphi(a)(m) \end{array} \end{array} \right]$$

Rq Analogie d'action de gp:

$$\left[G \curvearrowright X \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{morphisme de gp} \\ G \xrightarrow{f} G_X = \text{Aut}(X) \end{array} \right]$$

Soient M_1, M_2 deux A -modules à gauche.
Déf Un morphisme de A -modules (à gauche)
est un morphisme de gp abélien
$$M_1 \xrightarrow{f} M_2$$

qui est de plus A -linéaire, i.e.

$$\forall a \in A, \forall m \in M_1, \text{ on a } f(a \cdot m) = a \cdot f(m)$$

Autrement-dit, le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} A \times M_1 & \xrightarrow{\quad \cdot \quad} & M_1 \\ (id_A, f) \downarrow & \curvearrowright & \downarrow f \\ A \times M_2 & \xrightarrow{\quad \cdot \quad} & M_2 \end{array}$$

Notation: $\left\{ \begin{array}{l} \text{les morphismes de } A\text{-modules} \\ M_1 \text{ et } M_2 \end{array} \right\}$ ^{à gauche} ~~extre~~

$$=: \text{Hom}_A(M_1, M_2)$$

Exo/Rq $\text{Hom}_A(M_1, M_2)$ est un gp abélien

avec la loi $(f_1 + f_2)(m) = f_1(m) + f_2(m)$

mais en général, $\text{Hom}_A(M_1, M_2)$ n'a pas une structure de A -module naturelle.

Def

Soit $f : M_1 \rightarrow M_2$ un morphisme de A -modules à gauche

- $\text{Ker}(f) := \{ m \in M_1 \mid f(m) = 0 \}$
- $\text{Im}(f)$
- f est injectif $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\}$
- f est surjectif $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = M_2$
- f isom. $\Leftrightarrow f$ inj et surj.

Def Soit M un A -module (à gauche)

- Un sous- A -module de M est un sous-gp. M' de M tq M' est stable par l'action de A i.e. $\forall m \in M', \forall a \in A, a.m \in M'$

- Soit M' un sous- A -module de M

alors le gp abél. quotient M/M' est muni d'une structure naturelle de A -module à gauche :

$$A \times \cancel{M/M'} \longrightarrow \cancel{M/M'}$$

$$(a, [m]) \longmapsto [a.m]$$

[Exo : Vérifier que cet isom. de gp est
de plus A -linéaire] .

Exemples

- A anneau (unitaire)

A est un A -module à gauche :

$$\begin{aligned} A \times A &\longrightarrow A \\ (a, m) &\longmapsto am \end{aligned}$$

- Un sous- A -module de A
est simplement un idéal à gauche de A .
- $\{0\} =: 0$ est un A -module.
- $A = \mathbb{Z}$, un $\mathbb{Z}$ -module est la même donnée

d'un groupe abélien
(i.e. on a une équivalence de catégories
$$\left(\begin{array}{c} \{ \mathbb{Z}\text{-modules} \} \\ \xrightarrow[\cong]{\text{Abli}} \end{array} \text{Ab} \right)$$

Soit M un gp abélien.

$$\mathbb{Z} \times M \longrightarrow M$$

$$(n, x) \mapsto n \cdot x = \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n \text{ fois}} \cdot x = \underbrace{x+x+\dots+x}_{n \text{ fois}} \quad \text{si } n \geq 0$$
$$- (-n) \cdot x \quad \text{si } n < 0$$

Inversément, si M est un $\mathbb{Z}$ -module
alors on a le gp ab. sans-joint.

De plus

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_1, M_2) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(M_1, M_2)$$

(Exo)

• $A = K$ corps

- un K -module est la même donnée d'un K -e.v.
- un morphisme entre deux K -modules est une application K -linéaire.

- $A = K[T]$, $K = \text{corps}$

On a une "équivalence de catégories"

$$\{ K[T]\text{-Modules} \} \xleftrightarrow{\cong} \{ (V, f) \mid \begin{array}{l} V: K\text{-esp. vect} \\ f \in \text{End}_K(V) \end{array} \}$$

c-à-d :

- Un $K[T]$ -module est la même donnée d'un K -e.v. V muni d'un endomorphisme $f \in \text{End}_K(V)$
- Un morphisme de $K[T]$ -modules $(V_1, f_1) \rightarrow (V_2, f_2)$ est la même donnée d'une app. K -lin. $V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2$ tq $f_2 \circ \varphi = \varphi \circ f_1$.

Construction :

- Si V est un $K[T]$ -module, par la restriction de scalaire V est un K -module, i.e. un K -e.v.

$$\text{On définit } f: V \longrightarrow V \\ x \longmapsto T \cdot x$$

Exo, vérifier que f est un K -endomorphisme.

$$\left(\begin{array}{l} \text{linéaire:} \\ \forall \lambda \in K \\ \forall x \in V \end{array} \right), f(\lambda x) = T \cdot (\lambda x) = (T\lambda) \cdot x = (\lambda T) \cdot x = \lambda \cdot (T \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

- Soit (V, f) une paire avec $f \in \text{End}_K(V)$

On définit une structure de $K[T]$ -module sur V :

$$\begin{array}{ccc}
 K[T] \times V & \longrightarrow & V \\
 (P(T), x) & \longmapsto & ad f^{(d)}(x) + \dots + a_1 f(x) + a_0 x \\
 \parallel & & \\
 a_1 T + \dots + a_0 & & \text{ou } f^{(i)} := \underbrace{f \circ \dots \circ f}_i \text{ fois}
 \end{array}$$

Exo: Vérifier que V est un $K[T]$ -module pour cette action
 (Ass: essentiellement, $(a_i T^i) \cdot (b_j T^j) \cdot x = a_i f^{(i)}(b_j f^{(j)}(x)) = a_i b_j f^{(i+j)}(x) = (a_i b_j T^{i+j}) \cdot x$)
Exo: . Vérifier que ces deux procédures sont inverses

• Vérifier que un morphisme $K[T]$ -linéaire
 entre (V_1, f_1) et (V_2, f_2) est une $\varphi \in \text{Hom}_K(V_1, V_2)$
 tq $f_2 \circ \varphi = \varphi \circ f_1$

(Raison: Si $V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2$ K -linéaire vérifiant $f_2 \circ \varphi = \varphi \circ f_1$

$$\begin{array}{ccc}
 V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \\
 f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\
 V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2
 \end{array} \quad \text{commute}$$

i.e.

Mq $V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2$ est un morphisme de $K[T]$ -modules.

$$\begin{aligned}
 \varphi(P(T) \cdot x) & \stackrel{?}{=} P(T) \cdot \varphi(x) \\
 & \stackrel{\parallel}{=} \sum_{i=0}^d a_i T^i \cdot \varphi(x) \\
 \varphi\left(\sum_{i=0}^d a_i T^i\right) \cdot x & \stackrel{\parallel}{=} \sum_{i=0}^d a_i f_1^{(i)}(\varphi(x)) \\
 & \stackrel{\parallel}{=} \sum_{i=0}^d a_i \varphi \circ f_1^{(i)}(x) \\
 \varphi\left(\sum_{i=0}^d a_i f_1^{(i)}(x)\right) & = \sum_{i=0}^d a_i \varphi \circ f_1^{(i)}(x)
 \end{aligned}$$